

BÀI 2 : CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

I) LÝ THUYẾT

$1/(c)' = 0$ (c là hằng số)	
$2/(u \pm v)' = u' \pm v'$	
$3/(ku)' = ku'$ (k là hằng số)	
$4/(uv)' = u'v + uv'$	
$5/\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	
$6/(x)' = 1$	
$7/(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$
$8/\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$9/\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n}{u^{n+1}}u'$
$10/(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$11/(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cos u$
$12/(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$13/(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$
$14/(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

d) $y = -2x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 1$

b) $y = -x^3 + 3x + 1$

e) $y = \frac{2x+1}{x-3}$

c) $y = \frac{x^4}{4} - x^2 + 1$

f) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x+1}$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^7 + x)^2$

b) $y = (2x^3 - 3x^2 - 6x + 1)^2$

c) $y = (1 - 2x^2)^3$

d) $y = (x - x^2)^{32}$

e) $y = (x^2 + x + 1)^4$

f) $y = (x^2 - x + 1)^3 \cdot (x^2 + x + 1)^2$

g) $y = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$

h) $y = \frac{1}{(x^2 - x + 1)^5}$

k) $y = (1 + 2x)(2 + 3x^2)(3 - 4x^3)$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 + x\sqrt{x} + 1$

b) $y = \sqrt{1 + 2x - x^2}$

c) $y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{1 - x^2}$

d) $y = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x}}$

e) $y = \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right)$

f) $y = \sqrt{x - 1} + \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$

g) $y = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^5$

h) $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$

k) $y = (1 + \sqrt{1 - 2x})^3$

l) $y = \frac{4x + 1}{\sqrt{x^2 + 2}}$

m) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x - 1}}$

n) $y = \sqrt{(x - 2)^3}$

Ví dụ 4: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 5 \sin x - 3 \cos x$

b) $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$

c) $y = \sqrt{1 + 2 \tan x}$

d) $y = \tan 3x - \cot 3x$

e) $y = \frac{\tan \sqrt{x}}{1 - \tan^2 \sqrt{x}}$

f) $y = 3(\sin^4 x^2 + \cos^4 x^2) - 2(\sin^6 x^2 + \cos^6 x^2)$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng:

a) Hàm số $y = \tan x$ thỏa mãn hệ thức $y' - y^2 - 1 = 0$

b) Hàm số $y = \cot 2x$ thỏa mãn hệ thức $y' + 2y^2 + 2 = 0$

Ví dụ 6: Tìm tham số m thỏa mãn

a) $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ biết $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2(m + 1)x + (m + 1)x + 3$

b) $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ biết $f(x) = \frac{(m - 2)x^3}{3} - 2(m + 2)x + (m + 2)x - 8$

III. BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 1: Tính đạo hàm các hàm số sau**

1. $y = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$

2. $y = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + x - 1$

3. $y = \frac{2x + 1}{x + 2}$

4. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

5. $y = \frac{ax + b}{cx + d}, ac \neq 0$

6. $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}, aa' \neq 0.$

Bài 2: Tính đạo hàm các hàm số sau

1. $y = x\sqrt{x^2 + 1}$

2. $y = \frac{3}{(2x + 5)^2}$

3. $y = \frac{2 - 2x + x^2}{x^2 - 1}$

4. $y = \sqrt{3x + 2 \tan x}$

5. $y = \sin^2(3x + 1)$

6. $y = (x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}.$

Bài 3: Tính đạo hàm các hàm số sau

1. $y = (x^7 + x)^2$

2. $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$

3. $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$

4. $y = x^2(2x + 1)(5x - 3)$

5. $y = \left(4x + \frac{5}{x^2} \right)^3$

6. $y = (x + 2)^3(x + 3)^2$

7. $y = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2}$

8. $y = x^2 + x\sqrt{x + 1}$

9. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$10. y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$11. y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$$

$$12. y = \sin^2 3x$$

$$13. y = \sqrt{3 \tan^2 x + \cot 2x}$$

$$14. y = \sqrt[3]{x^3 + \cos^4(2x - \frac{\pi}{3})}$$

$$15. y = 2 \sin(x^2 + 2)$$

$$16. y = \cos^2(\sin^3 x)$$

$$17. y = \frac{x}{\sin x}$$

$$18. y = -\frac{\cos x}{3 \sin^3 x} + \frac{4}{3} \cot x$$

$$19. f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Bài 4 : Tính $\frac{f'(1)}{\varphi'(0)}$. Biết rằng : $f(x) = x^2$ và $\varphi(x) = 4x + \sin \frac{\pi x}{2}$.

Bài 5 : Chứng minh rằng các hàm số sau đây có đạo hàm không phụ thuộc x.

$$1. y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$2. y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2 \sin^2 x$$

Bài 6 : Tìm tham số m để các hàm số

$$1. y = (m-1)x^3 - 3(m+2)x^2 - 6(m+2)x + 1 \text{ có } y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2. y = \frac{mx^3}{3} - mx^2 + (3m-1)x + 1 \text{ có } y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 7: Tính đạo hàm của các hàm số sau

$$1. f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} + 3 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Bài 8: Tìm a, b để các hàm số sau có đạo hàm trên $\mathbb{R}$

$$1. f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ -x^2 + ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + ax + b & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Bài 9: Tính đạo hàm các hàm số sau

$$1. y = (x^3 + 2x)^3$$

$$2. y = (x^2 - 1)(3x^3 + 2x)$$

$$3. y = \left(x + \frac{2}{3x^2}\right)^2$$

$$4. y = 2 \sin^3 2x + \tan^2 3x + x \cos 4x$$

$$5. y = \frac{\sin 2x}{x} - \frac{x}{\cos 3x}$$

$$6. y = x \sin 2x + \sqrt{x^3 + x^2 + 1}$$

$$7. y = \sqrt{2 \sin^2 x + x^3 + 1}$$

$$8. y = \sqrt{\sqrt{x^2 + 1} + 2x - 1}$$

$$9. y = x \tan 2x + \frac{x+1}{\cot x}$$

$$10. y = \sqrt{\sin^3\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1}$$

Bài 10: Giải bất phương trình :

$$1. f'(x) \geq 0 \text{ với } f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

$$2. f'(x) < 0 \text{ với } f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 1$$

$$3. 2xf'(x) - f(x) \geq 0 \text{ với } f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$4. f'(x) > 0 \text{ với } f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}.$$

Bài 11 : Tìm các giới hạn sau

$$1. A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^3 - (1-4x)^4}{x}$$

$$2. B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$$

$$3. C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{\sqrt[m]{1+bx} - 1} \quad (m, n \in \mathbb{N}; a, b \neq 0)$$

$$4. D = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - x}{x^2 - 1}$$

Bài 12 : Tìm các giới hạn sau

1. $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{1 - \sqrt{2-x^2}}$

3. $C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{26x^3+1} - \sqrt[4]{80x^4+1}}{\sqrt{x} - 1}$

2. $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$

4. $E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{4-2x+x^2} - \sqrt[3]{4+2x+x^2}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}$